

АНАЛИЗ НА ВРЕМЕННИ РЕДОВЕ

Министерство на Финансите:

Школа по публични финанси съвместно с д-я Икономически анализи и прогнози

План на презентацията

2

- I. Стохастичен процес и времеви ред – основни понятия
- II. Едномерен анализ на времеви редове - подход на Box-Jenkins
- III. Интеграция и коинтеграция на времеви редове
- IV. Моделиране на краткосрочни и дългосрочни зависимости между икономически променливи – динамични модели

Тема I.

3

Стохастичен процес и времеви ред –
ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Случайна величина

4

- **Случайна величина** – величина, която приема различни числени стойности с определена вероятност.

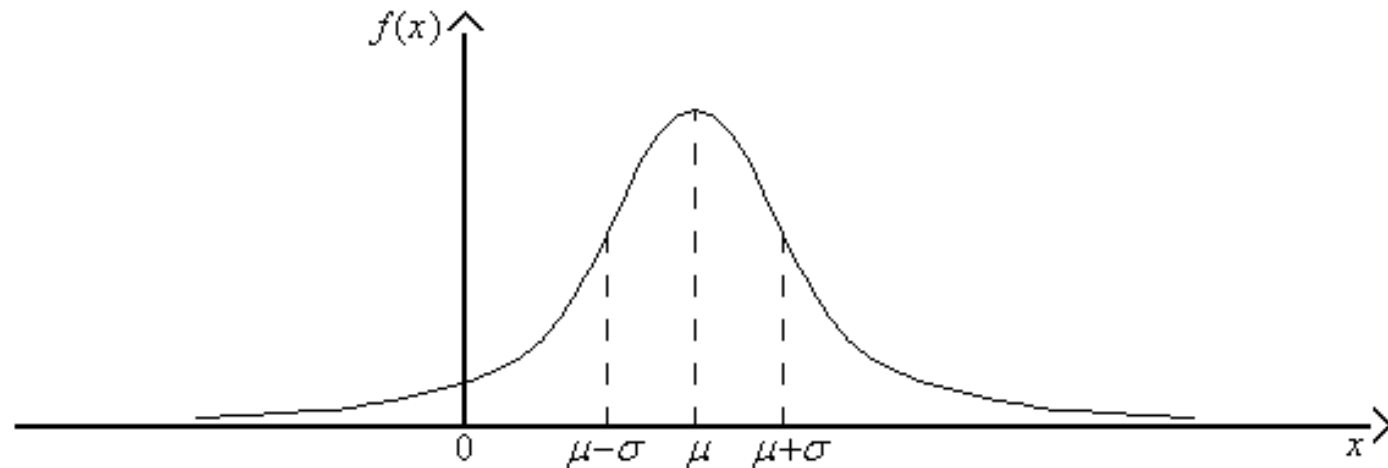
- **Видове** случайни величини:
 - дискретни
 - непрекъснати

- **Параметри** на разпределението на случайната величина:
 - очаквана стойност (средна) - $E(X)$
 - вариация - $\text{var}(X)$

Нормално разпределение $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ разпределение на Гаус (C.F. Gauss)

5

$$E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$



$f(x)$ – функция на плътността

максимум $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ при $x = \mu$

Стохастичен процес

6

- **Стохастичен процес** - семейство от случайни величини, подредени във времето:

$$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_t, \dots\}$$

- **Видове** стохастични процеси:
 - дискретни
 - непрекъснати

Времеви редове

7

- **Времевите редове** могат да бъдат разглеждани като реализация на стохастичен процес.
- Един стохастичен процес може да има **различни реализации.**
- **Примери:**
електрокардиограма, данни за безработицата, паричното предлагане и т.н.

Характерни особености на икономическите времеви редове

8

При икономическите времеви редове:

- най-често случайните величини $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_t, \dots\}$
не са независими. (Защо?)
- най-често разполагаме с **единична реализация** на всяка от тези случайни величини.

Стохастичен процес „random walk”

9

Пример:

Турист иска да стигне до най-близкия хотел в непознат град, но не знае в коя посока да тръгне.

Хвърля монета и:

- ако падне “ези” прави крачка в ляво,
- ако падне “тура” – крачка в дясно.

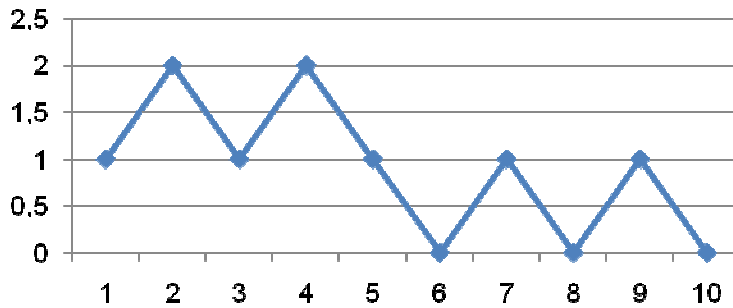
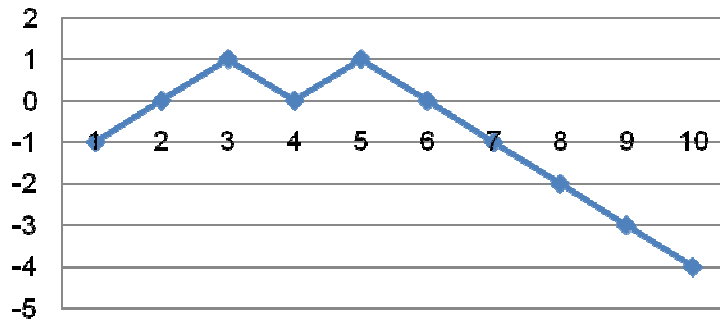
Траекторията му е стохастичен процес “random walk”:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \begin{cases} +1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}$$

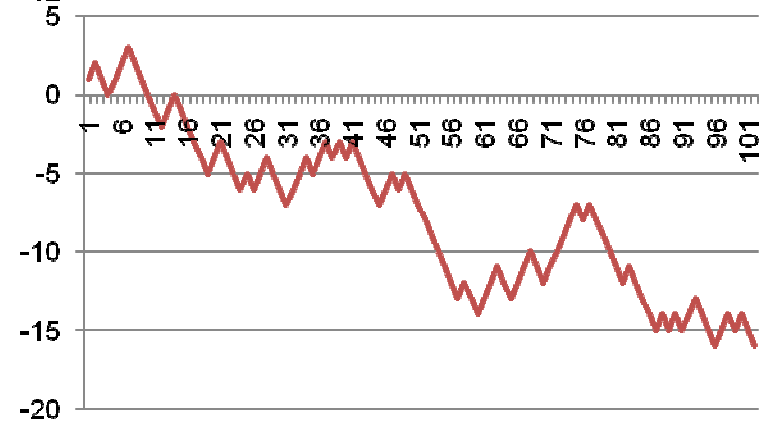
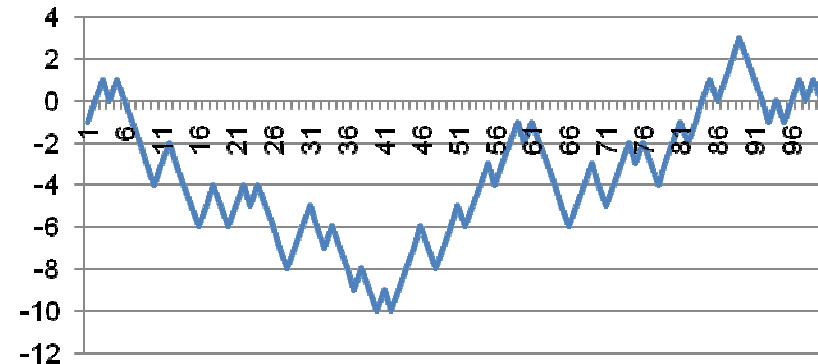
4 реализации на стохастичен процес “random walk”

10

t=10



t=100



Очаквана стойност и вариация на стохастичен процес “random walk”

11

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \begin{cases} +1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}$$

Каква е очакваната стойност и вариацията на ε_t ?

$$E(\varepsilon_t) = \dots \quad \text{var}(\varepsilon_t) = \dots$$

Каква е очакваната стойност и вариацията на Y_t ?

$$E(Y_t) = \dots \quad \text{var}(Y_t) = \dots$$

Каква е **условната** очаквана стойност и **условната** вариация на Y_t ?

$$E(Y_t | Y_{t-1}) = \dots \quad \text{var}(Y_t | Y_{t-1}) = \dots$$

Louis Bachelier, 1900 г.

Théorie de la Spéculation

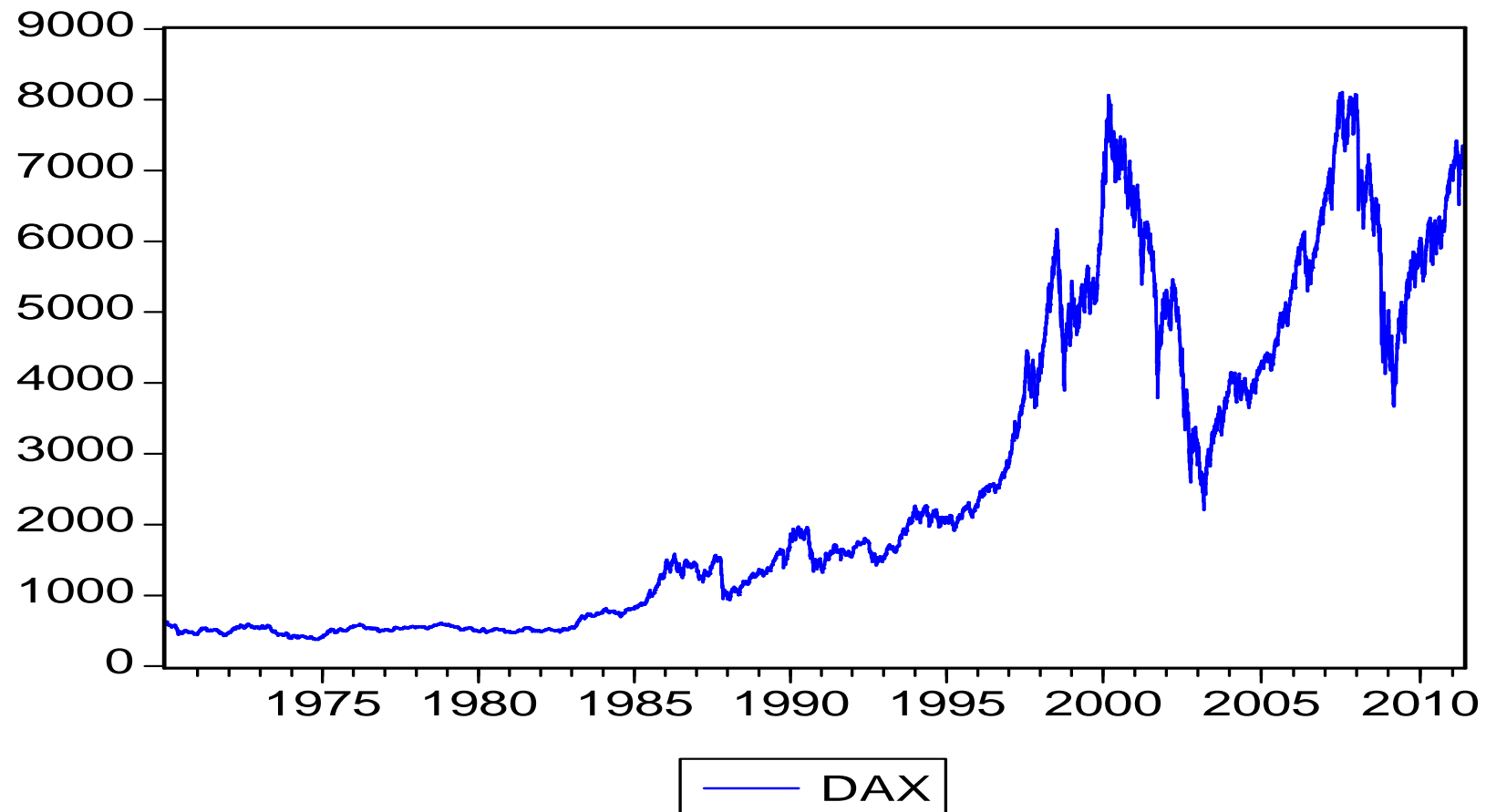
12

Random Walk Hypothesis :

- Цените на финансовите инструменти са генерирани от стохастичен процес “*random walk*”.
- Това означава, че очакваната цена на финансовия инструмент в следващия период е равна на текущата му цена плюс случайна величина с очаквана стойност нула.

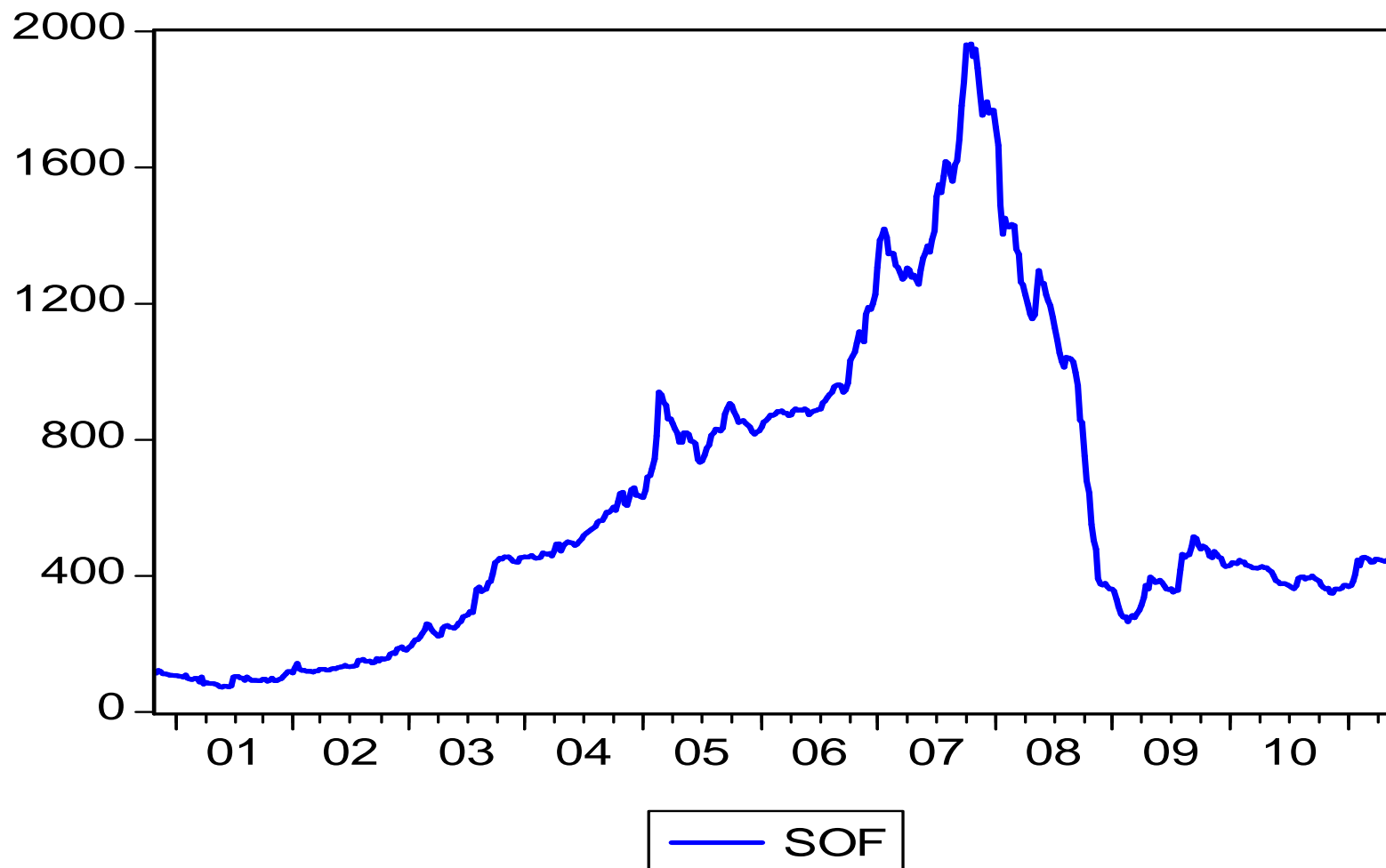
Борсов индекс DAX

13



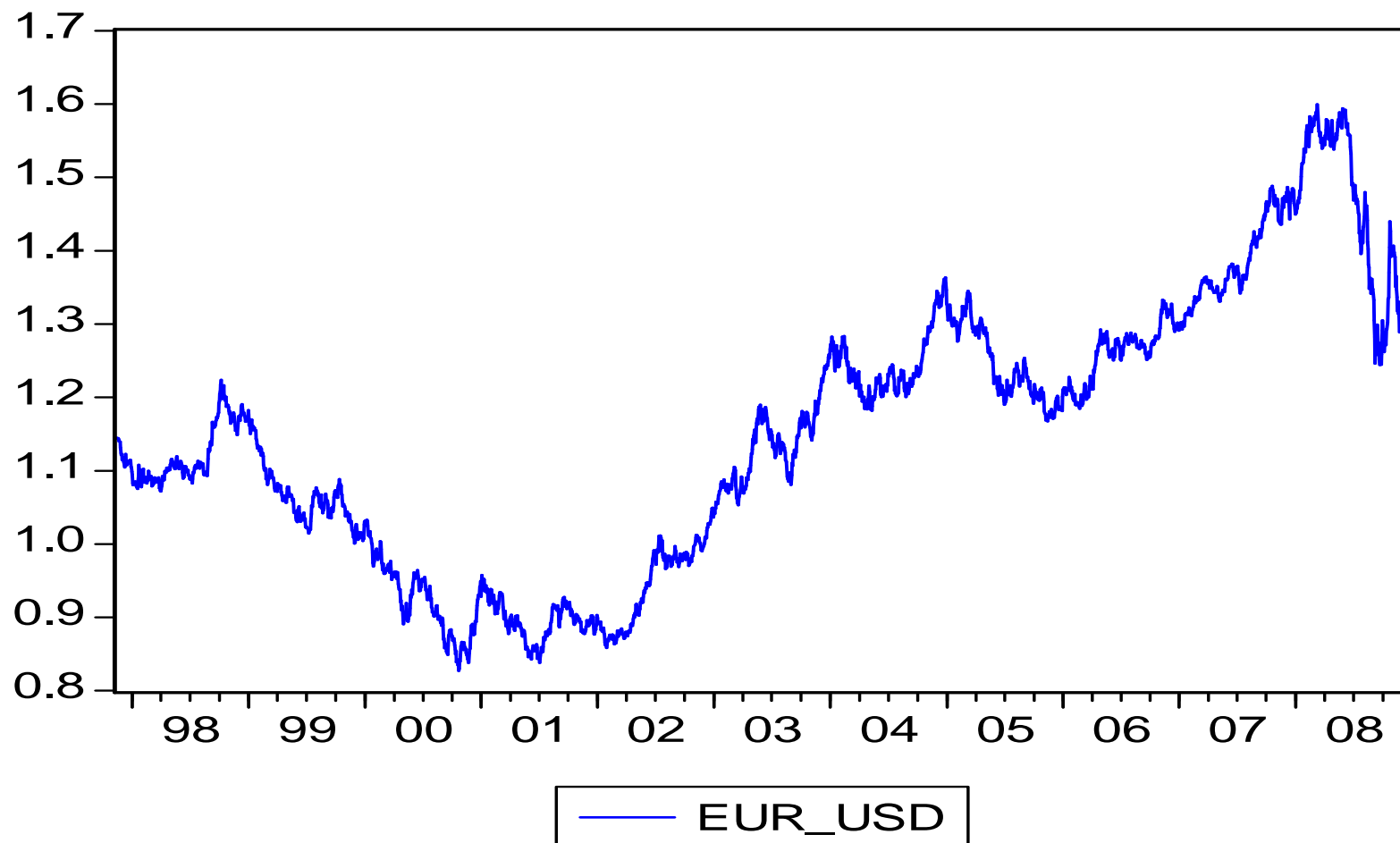
Борсов индекс SOFIX

14



Валутен курс EUR/USD

15



Опис на стохастичен процес

16

- Стохастичният процес може да бъде описан чрез **общото разпределение** на случайните величини:

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_t$$

Опис на стохастичен процес

17

□ или чрез моментите от първи и втори ред на това общо разпределение:

- **очаквана стойност (средна)** $\mu(t) = E(Y_t)$

- **вариация** $\sigma^2(t) = \text{var}(Y_t)$

- **автоковариация** $\gamma(t_1, t_2) = \text{cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2})$

Стационарност и нестационарност на стохастичните процеси

18

Видове стохастични процеси:

- стационарни
- нестационарни

Стриктна стационарност

19

- Стохастичният процес е стриктно стационарен (*strictly stationary*), ако общото разпределение на всеки n наблюдения (от 1 до n)

$$Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$$

е идентично със общото разпределение на всеки следващи n наблюдения (от $1+k$ до $n+k$)

$$Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}$$

за всяко n и k .

Слаба (коварианционна) стационарност

20

- Стохастичният процес е слабо стационарен (*weakly* или *covariance stationary*), ако са изпълнени следните условия за $t = 1, 2, \dots, \infty$:

$$(1) \quad E(Y_t) = \mu$$

$$(2) \quad E(Y_t - \mu)(Y_t - \mu) = \sigma^2 < \infty$$

$$(3) \quad E(Y_{t_1} - \mu)(Y_{t_2} - \mu) = \gamma(t_1, t_2) \quad \square \quad t_1, t_2$$

$$\text{тоест } E(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k \quad k = t_2 - t_1$$

Слаба (коварианционна) стационарност

21

Процесът е **слабо стационарен**, ако има **постоянна**:

□ очаквана стойност (средна) $E(Y_t) = \mu = const$

□ вариация $var(y_t) = \sigma^2 = const$

□ ковариация за всеки лаг $\gamma_k = const_k$

Тема II.

22

Едномерен анализ на времеви редове –
подход на Box-Jenkins

Подходи при моделирането

23

- **1. Структурно моделиране** – знаем законите, които управляват дадено явление или процес (във физиката, биологията, обществото) и въз основа на тях, след известно опростяване, създаваме модел. Най-често включваме и случаен фактор.

- **2. Стохастично моделиране** – не знаем законите, които управляват дадено явление или процес. Разполагаме само с времеви ред, който е резултат от този процес.

Знаем или предполагаваме, че в процеса участват много “агенти”, които взимат решения по случаен (неизвестен) начин, но поради някакъв **механизъм** резултатния усреднен процес показва закономерности.

Наблюдавайки тези закономерности във времеви ред, се стремим да определим основните характеристики на механизма, който ги генерира.

Основни цели на изследването на времените редове

24

- 1) Идентификация на процеса генериращ данни.
- 2) Прогнозиране на бъдещите стойности на
времения ред.

Едномерен анализ на времеви ред

25

- При едномерния анализ на времевите редове приемаме, че бъдещето на времевия ред е “закодирано” в неговото минало,

тоест моделирайки досегашните стойности на времевия ред чрез съответен стохастичен процес целим да прогнозираме бъдещите му стойности.

Функция асvf и асf

26

- Функция на автоковариацията асvf

$$E(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu) = \gamma_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Функция на автокорелацията асf

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Функция на автокорелация асf - корелограма

27

- Корелограмата показва коефициентите на корелация ρ_k на стойностите на времевия ред със съответните лагове на този ред:

лаг 1, $k=1$, ρ_1

лаг 2, $k=2$, ρ_2

лаг 3, $k=3$, ρ_3

и т. н.

Стохастичен процес “бял шум” (white noise)

28

- “Бял шум” наричаме процес, представляващ ред от независими случайни величини с еднакво разпределение, с параметри μ, σ^2 :

$$y_t \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$$

$$E(y_t) = \mu$$

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Стохастичен процес “бял шум” (white noise)

29

- Функция на автоковариация (acvf):

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- Функция на автокорелация (acf):

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Процес “пълзяща средна” от порядък q , MA (q), (moving average process of order q)

30

- Нека ε_t ($t=1,2,3,\dots$) е бял шум,

$$E(\varepsilon_t) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

- Процес MA(q) наричаме следната линейна комбинация:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Процес МА (q)

31

$$E(y_t) = \mu$$

$$\text{var}(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (\theta_k + \theta_{k+1} \theta_1 + \theta_{k+2} \theta_2 + \dots + \theta_q \theta_{q-k}) \sigma^2, & k = 1, 2, \dots, q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Процес МА (q)

Функция на автокорелация (acf)

32

- Изведете функцията асф на процеса МА(q), като използвате:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Стационарност на $MA(q)$

33

- Можем ли да твърдим, че всеки $MA(q)$ процес е слабо стационарен? Защо?

Процес МА (q) – лаг оператор

34

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

L – лаг оператор

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \dots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$y_t = \mu + \underbrace{(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)} \varepsilon_t$$

$$y_t = \mu + \theta(L) \varepsilon_t$$

Процес МА (q) – характеристично уравнение

35

$$y_t = \mu + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q = 0$$

$$1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q = 0$$

Условие за обратимост на процеса MA(q)

36

- Корените на характеристичното уравнение

$$1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q = 0$$

да са извън единичната окръжност.

- Eviews изчислява “inverted roots”.

Авторегресионен процес от порядък p , AR(p), (autoregressive process of order p)

37

□ Процес AR(p):

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

където ε_t ($t=1,2,3,\dots$) е бял шум, $E(\varepsilon_t) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$

Процес AR(p) - очаквана СТОЙНОСТ

38

$$E(y_t) = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Уравнения на Yule-Walker

39

- Функцията ρ_{τ} за процесите AR се изчислява като се използват уравненията на Yule-Walker:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \rho_1\phi_2 + \dots + \rho_{p-1}\phi_p \\ \rho_2 = \rho_1\phi_1 + \phi_2 + \dots + \rho_{p-2}\phi_p \\ \dots \\ \rho_p = \rho_{p-1}\phi_1 + \rho_{p-2}\phi_2 + \dots + \phi_p \end{array} \right.$$

Процес AR(1)

Функция на автокорелация (acf)

40

- Изведете функцията acf на процеса AR(1), като използвате:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- Ако AR (1) процесът е стационарен, функцията acf ще намалява геометрично към 0.

Стационарност на $AR(p)$

41

- Можем ли да твърдим, че всеки $AR(p)$ процес е стационарен? Защо?

Процес AR(p) – лаг оператор

42

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

L – лаг оператор

$$y_t = \mu + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = \mu + y_t (\phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_p L^p) + \varepsilon_t$$

$$y_t (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) = \mu + \varepsilon_t$$

$$\phi(L) y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Процес AR(p) – характеристично уравнение

43

$$y_t (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) = \mu + \varepsilon_t$$

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$$

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

Условие за стационарност на процеса AR(p)

44

- Корените на характеристичното уравнение:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

да са извън единичната окръжност.

- Eviews изчислява “inverted roots”.

Теорема за декомпозиция на Wold (Wold's decomposition theorem)

45

- Всеки стационарен времеви ред може да бъде представен като сума от два независими процеса:
 - чисто детерминистична част и
 - чисто стохастична част, която е $MA(\infty)$.

(Не?)стационарност на $AR(p)$ и $MA(q)$

- обобщение

46

□ $AR(p)$

Ако корените на характеристичното уравнение не са извън единичната окръжност, процесът е нестационарен. Това се вижда и на корелограмата. Функцията a_{cf} не намалява. Процесът има много дълга “памет”.

Ако корените на характеристичното уравнение са извън единичната окръжност, процесът е стационарен и функцията a_{cf} намалява.

□ $MA(q)$

Процесите $MA(q)$ са винаги стационарни (поне слабо). Функцията $a_{cf} = 0$ след q лага. “Паметта” на процеса е кратка.

Стационарност и нестационарност

47

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- При **стационарните процеси** ($|\phi| < 1$) реакцията на външен импулс (шок) постепенно намалява.
- При **нестационарните процеси** реакцията на импулса (шока) никога не намалява:
 - траен ефект (persistent) $|\phi| = 1$
 - експлодиращ ефект (explosive) $|\phi| > 1$

MA репрезентация на AR процес

48

- Всеки AR(p) процес може да бъде представен като MA(∞)

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t =$$

$$= \mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t =$$

$$= \mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t =$$

$$= \mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t =$$

...

$$= \mu(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots) + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots$$

Обратимост на MA(q) процес

49

- Процесът MA(q) е обратим, ако може да бъде представен като стационарен AR(∞).

$$\begin{aligned}y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} = \\&= \varepsilon_t + \theta_1 (y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = \\&= \varepsilon_t + \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 (y_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}) = \\&= \varepsilon_t + \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 (y_{t-3} - \theta_1 \varepsilon_{t-4}) = \\&= \varepsilon_t + \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 y_{t-3} - \theta_1^4 \varepsilon_{t-4} = \dots \\&\varepsilon_t + \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 y_{t-3} - \theta_1^4 y_{t-4} + \dots \\&= \varepsilon_t + c_1 y_{t-1} + c_2 y_{t-2} + c_3 y_{t-3} + c_4 y_{t-4} \dots\end{aligned}$$

Обратимост на $MA(q)$ процес

50

- Условието за обратимост на $MA(q)$ процеса е подобно до условието за стационарност на $AR(p)$.
- В случая с MA това условие предпазва процеса MA от “избухване” (exploding), когато е записан като $AR(\infty)$.

Процес ARMA(p,q)

51

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Където ε_t е бял шум $E(\varepsilon_t) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$

Процес ARMA(p,q)

52

- Нека y_t е времеви ред от реални данни.
Не познаваме механизма, който е генерирал тези данни. Предполагаме, че данните съдържат и “шум”.
- Ако редът е стационарен, опитваме се да го представим по следния начин:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

тоест като комбинация на AR(p) и MA(q) – филтриран от шума ред AR(p).

Автокорелация и корелограма

53

- Корелограмата показва не истинските коефициенти на автокорелация, а оценките им получени въз основа на единична реализация на процеса.

“Визуални” критерии за идентификация на вида на процеса

54

Вид на процеса	acf	pacf
AR(p)	Намалява (безкрайна)	Прекъсва (крайна)
MA(q)	Прекъсва (крайна)	Намалява (безкрайна)
ARMA(p,q)	Намалява (безкрайна)	Намалява (безкрайна)

Информационни критерии

55

- Най-често корелограмите не показват ясни схеми на acf и $pacf$, поради факта, че реалните данни представляват смесица от информация и “шум”.
- Алтернативно решение за преодоляването на субективността при идентификацията на модела $ARMA(p,q)$ са информационните критерии.

Информационни критерии

56

Информационните критерии взимат под внимание два фактора:

- RSS (сума на квадратите на остатъците) $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n}$
- “penalty term” за добавяне на нов лаг.

- Добавяйки нов лаг (или нова обясняваща променлива) към модела информационните критерии отчитат влиянието на 2 ефекта: RSS ще намалее, но ще се увеличи “penalty term”.

Информационни критерии

57

- Информационен критерий на Akaike (1974)

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{n}$$

- Schwarz's Bayesian information criterion (1978)

$$SBIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{n} \ln(n)$$

- Информационен критерий на Hannan-Quinn

$$HQIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{n} \ln(\ln(n))$$

k – брой на параметрите, $k=p+q+1$.

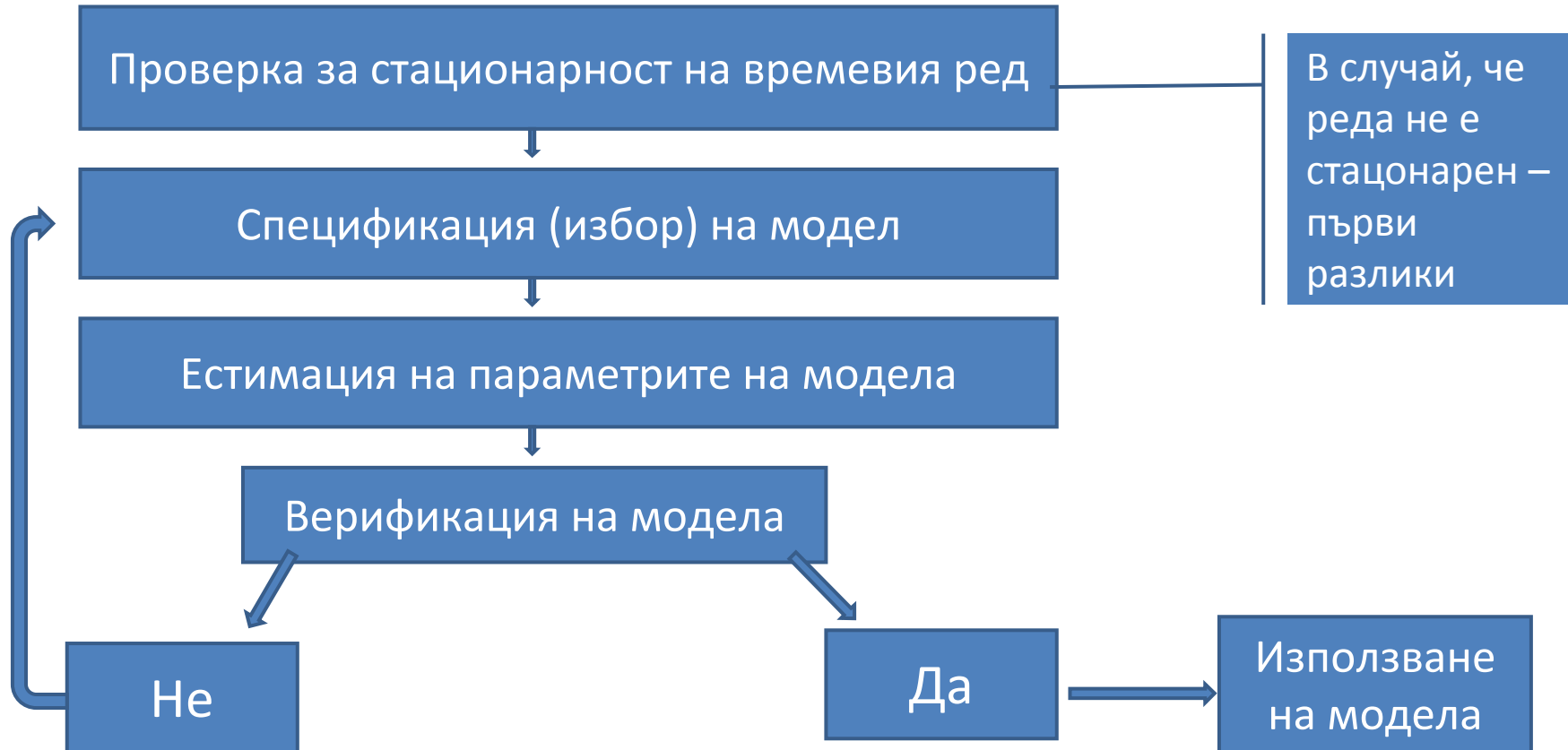
Подход на Box - Jenkins

58

В моделите на Box и Jenkins трендът и сезонността (стохастични) се елиминират с помощта на операторите за разлики и се моделира това, което остава след това като процеси $ARMA(p,q)$.

Методология на Box - Jenkins

59



Подход на Box - Jenkins

предимства

60

- **Универсалност** – може да бъде прилаган при различни редове – стационарни, нестационарни, със сезонност или без.
- Един от **най-популярните** подходи при едномерния анализ на времеви редове.
- Методологията на Box - Jenkins е имплементирана в повечето иконометрични **компютърни програми**.

Естимация на моделите ARMA

61

- Естимацията на параметрите на моделите $AR(p)$ може да се извърши чрез МНК или чрез метода на най-голямото правдоподобие. Естиматорът МНК е състоятелен и асимптотично неизместен (тоест не е неизместен) и не е ефективен.
- Естимацията на параметрите на моделите $MA(q)$ не може да се извърши чрез МНК, тъй като ε_t не са наблюдаеми. Използва се методът на най-голямото правдоподобие или “grid-research procedure”.

Грешки тип ARMA (p,q)

62

- Можем да използваме моделите ARMA (p,q) не само в едномерния анализ на дадена променлива, но и за да моделираме грешките в традиционен структурен модел.

Процес ARIMA (p,d,q)

63

- Моделите ARMA прилагаме, когато времевите редове са стационарни.
- Когато първичните икономически данни са нестационарни, $I(d)$, преди избора на подходящ модел ARMA(p,q) трябва да бъдат изчислени d-разликите, тоест стохастичният процес е: **ARIMA (p,d,q)**
- Най-често икономическите времеви редове са $I(1)$, изчисляваме първите разлики.

Ограничения на моделите на Box-Jenkins

64

- Ако имаме две променливи, които са $I(1)$, можем да изчислим първите разлики и да оценим следния модел:

$$\Delta y_t = \beta \Delta x_t + \varepsilon_t$$

- По този начин обаче губим дългосрочната зависимост между променливите. Този модел няма дългосрочно решение (long-term solution).

Ограничения на моделите на Box-Jenkins

65

- При изчисляването на разликите се губят важни дългосрочни характеристики на реда и затова въз основа на първите (или d -) разлики не могат да бъдат диагностицирани дългосрочните зависимости между променливите.

Тема III.

66

Интеграция и коинтеграция на времеви
редове

Интеграция на времеви ред

67

- Времевият ред y_t е интегриран в първа степен, ако след изчисляване на първите разлики става стационарен.

$$\Delta y_t = \varepsilon_t \quad y_t \sim I(1) \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(\mu, \sigma^2)$$

- Времевият ред y_t е интегриран в степен d , ако след изчисляване на d -разликите става стационарен.

$$\Delta^d y_t = \varepsilon_t \quad y_t \sim I(d) \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(\mu, \sigma^2)$$

Интеграция на времеви ред

68

- Ако редът е стационарен и изчислим първите разлики, отново ще получим стационарен ред, но с МА структура.

- Времеви ред $I(0)$ е стационарен.

- Времеви ред $I(1)$ притежава един единичен корен (unit-root).

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Времеви ред $I(2)$ притежава 2 единични корена.

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Защо е необходимо изследването на стационарността?

69

- Нека си представим следния експеримент: генерираме 2 променливи независимо една от друга. След това оценяваме регресия на една от тези променливи спрямо другата.
- Каква оценка на параметъра пред зависимата променлива очакваме?
- Въз основа на експерименти е доказано, че ако променливите са стационарни – оценката на този параметър не се различава значимо от нула, а коефициентът на детерминация R^2 е близък до нулата, както се очаква.

Интеграция на икономическите редове

70

- Най-често икономическите времеви редове са интегрирани в степен 1 или 0.

Защо е необходимо изследването на стационарността?

71

- Ако променливите са нестационарни обаче, оказва се, че се получават необосновано високи стойности на R^2 и завишени стойности на тестовите статистики.
- Явлението привидна зависимост (spurious regression) е забелязано за първи път от Нобеловия лауреат Clive Granger.
- Ако променливите са нестационарни, не може да се използват асимптотичните свойства на КМНК и тестовете за значимост, защото тестовите статистики имат съвсем други разпределения.

Моделиране на нестационарността

72

- Детерминистичен тренд
- Стохастичен тренд
- Модели ARIMA

Типове нестационарност

73

- Наличие на детерминистичен тренд - полином от степен q .

$$y_t = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_q t^q + \varepsilon_t$$

- Наличие на стохастичен тренд – изчисляване на разлики, с цел премахване на тренда:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Тестове за единичния корен (Unit-root tests)

74

- Тест на Dickey-Fuller
- Тест Augmented Dickey-Fuller

Тест на Dickey-Fuller

75

- Да приемем, че искаме да тестваме дали редът y_t е интегриран в първа степен, $I(1)$, тоест дали y_t е генериран от:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- На пръв поглед логично е да се тества дали $\rho = 1$

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Тест на Dickey-Fuller

76

- Ако ε_t е бял шум, то процесът $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ при $\rho = 1$ е “random walk”, който знаем, че е нестационарен.

2 проблема:

- МНК естиматорът за ρ може да бъде изместен при процесите AR.
- Разпределението на тестовата статистика t не е известно, когато y_t не е стационарен.

Тест на Dickey-Fuller

77

- Затова на практика се използва следния запис:

$$y_t - y_{t-1} = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \delta = \rho - 1$$

- Тества се дали $\delta = 0$

Нулева и алтернативна хипотеза при теста DF

78

$$H_0: \delta = 0$$

Редът е нестационарен, има единичен корен, $|\rho|=1$.

$$H_1: \delta \neq 0$$

Редът е стационарен $|\rho| < 1$.

Тест на Dickey-Fuller

79

- Тестовата статистика

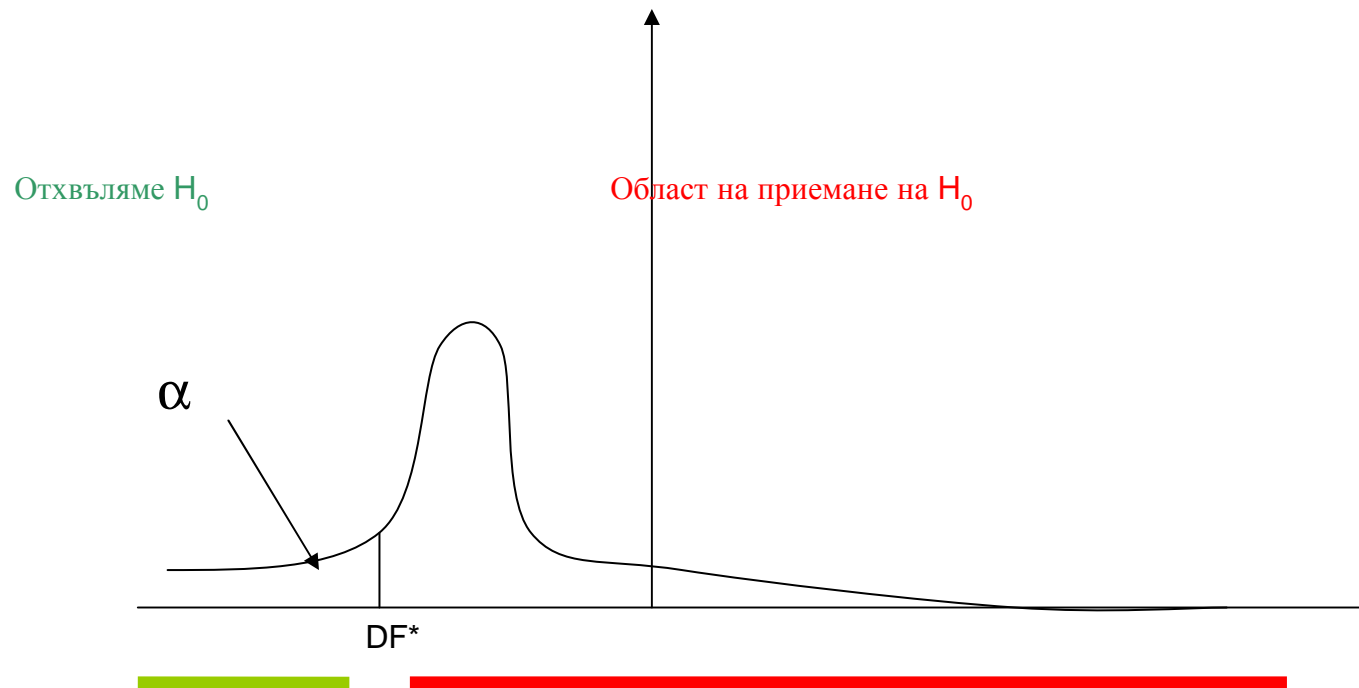
$$\tau = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})}$$

има нестандартно разпределение, тъй като това е регресия на стационарна променлива спрямо нестационарна. Разпределението на тестовата статистика е асиметрично и изместено вляво.

- Dickey и Fuller (1976) са изчислили критичните стойности на това разпределение чрез симулационни методи.

Критични стойности на теста DF

80



Няколко версии на теста DF

81

- Тест DF със свободен член

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Няколко версии на теста DF

82

- Тест DF с тренд

$$y_t = \rho y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$$

Няколко версии на теста DF

83

- Тест DF със свободен член и тренд

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \beta t + \varepsilon_t$$

Разширен тест на Dickey и Fuller

Augmented Dickey-Fuller Test (ADF)

84

- Ако ε_t не е бял шум, а показва **автокорелация**, тогава трябва да “разширим” теста:

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + \alpha_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- Целта на тези разширения е да обхванат автокорелацията.

Недостатъци на теста ADF

85

- Малка мощност, когато φ приема стойности близки до 1 (напр. $\varphi = 0,95$) и особено при малки извадки.

- Можем да не отхвърлим H_0 по 2 причини:
 - или защото H_0 е вярна;
 - или защото нямаме достатъчно данни, които да потвърдят това решение.

Решението!

86

- Едновременно прилагаме тестове за стационарност и тестове за единичния корен:

ADF (PP)

$$H_0: y_t \sim I(1)$$

$$H_1: y_t \sim I(0)$$

KPSS

$$H_0: y_t \sim I(0)$$

$$H_1: y_t \sim I(1)$$

Идея за коинтеграцията Engle и Granger (1987)

87

- Времевите редове x_t и y_t са коинтегрирани в степен d, b , ($d \geq b \geq 0$)

$$x_t, y_t \sim CI(d, b)$$

ако:

$$1) \quad x_t \sim I(d), \quad y_t \sim I(d)$$

$$2) \quad \exists \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t \sim I(d - b)$$

$(\alpha_1; \alpha_2)$ коинтегриращ вектор

Коинтеграция Engle и Granger (1987) - повече от две коинтегрирани променливи

88

- Нека е даден вектор от променливи \mathbf{W}_t ($k \times 1$).
- Компонентите на \mathbf{W}_t е са коинтегрирани в степен d, b , $(d \geq b \geq 0)$

ако:

- 1) ВСИЧКИ КОМПОНЕНТИ НА $w_t \sim I(d)$
- 2) $\exists \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{w}_t \sim I(d - b)$

$\boldsymbol{\alpha}$ коинтегриращ вектор

Проверка за коинтеграция

89

- 1. **Метод на Engle-Granger** – проверка дали дадена линейна комбинация на променливите е стационарна (ако знаем коефициентите на тази комбинация) или оценка на регресията на една от променливите спрямо останалите и проверка за стационарност на остатъците.
- 2. **Метод на Johansen** – получаваме информация за всички възможни коинтегриращи вектори за дадената група променливи.

Метод на Engle-Granger

90

- 1) Проверяваме дали всички променливи са $I(1)$. Оценка на регресията на една от променливите спрямо останалите – получаваме МНК оценки на параметрите.
- 2) Прилагаме теста ADF за остатъците на модела. Критичните стойности на тестовата статистика са различни – изчислени са от **Engle и Granger (1987)**.

Хипотези в теста EG:

- H_0 : Остатъците са нестационарни, тоест векторът с оценки на параметрите не е коинтегриращ вектор.
- H_1 : Остатъците са стационарни, тоест векторът с оценки на параметрите е коинтегриращ вектор.

Метод на Engle-Granger - недостатъци

91

1. Слаба мощност на теста при малки извадки.
2. Арбитрален избор на обясняваната промелива.
3. Методът на Engle-Granger се базира на теста ADF приложен за остатъците на коинтегриращото уравнение, (което е едно) – тоест открива един коинтегриращ вектор – този с най-малка вариация.

Тест за коинтеграция на Johansen

92

- Методът на Johansen е по-универсален, тъй като разкрива всички базови коинтегриращи вектори.

Тест за коинтеграция на Johansen

93

- За да бъде приложен този тест, моделът VAR се записва във вид на VECM:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_{t-p} \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\Gamma}_3 \Delta \mathbf{y}_{t-3} + \dots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

където

$$\boldsymbol{\Pi} = \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i - \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{\Gamma}_i = - \sum_{j=i+1}^p \mathbf{A}_j$$

Тест за коинтеграция на Johansen - какъв е ранга на матрицата Π ?

94

- Рангът на матрицата Π :

$$0 \leq \text{rank}(\Pi) \leq k$$

- Ако рангът е равен на 0 – няма дълготрайна зависимост.

$$\Pi = \mathbf{alpha} \cdot \Lambda^T$$

- където Λ е матрица, съставена от собствените вектори на матрицата Π (коинтегриращите вектори), отговарящи на подредените намал. ненулеви собствени стойности.

alpha е матрица с “adjustment parameters”.

Последователност от хипотези в теста на Johansen

95

- $H_0(0): CE=0$ $H_1(0): CE>0$
Отхвърлянето на H_0 означава, че съществува поне един коинтегриращ вектор.

- $H_0(1): CE=1$ $H_1(1): CE>1$
Отхвърлянето на H_0 означава, че съществуват поне 2 независими коинтегриращи вектора.

- $H_0(2): CE=2$ $H_1(2): CE>2$
Отхвърлянето на H_0 означава, че съществуват поне 3 независими коинтегриращи вектора.

...

Тестови статистики в теста на Johansen

96

- Trace test:

$$LR_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^k \log(1 - \lambda_i)$$

- Тест на максималната собствена стойност
(max eigenvalue)

$$LR_{max}(r) = -T \log(1 - \lambda_{r+1})$$

Недостатъци на метода на Johansen

97

- Ако в действителност променливите не са $I(1)$, има риск да получим привидна коинтеграция.
- Методът е чувствителен към определянето на лаговете на модела VAR.
- Оценките на коинтегриращите вектори зависят от спазването на изискванията към остатъците на модела.

Тема IV.

98

Моделиране на краткосрочни и дългосрочни зависимости между икономически променливи – динамични модели

Дългосрочно равновесие

99

- **Равновесие** на системата е състояние, при което няма тенденции за неговата промяна.
- Икономическите системи са подложени на външни въздействия, които ги отклоняват от състоянието на равновесие.
- **Дългосрочно равновесие** – състояние, до което системата се приближава ,след като е била отклонена от действието на външни сили и което ще достигне след краен период от време.

Динамични модели

100

Динамичните модели описват развитието на дадено явление във времето.

Най-важни приложения:

1. Изследване на:

- процеса на достигане на дългосрочното равновесно състояние на системата;
- съществуването на такова равновесие;
- скоростта на реакцията на системата след въздействието на външен импулс (шок).

2. Прогнозиране на бъдещите стойности на процеса.

3. Обясняване на динамиката на зависимата променлива.

Модел с разпределение на лаговете DL(n), (distributed lags)

101

- Модел DL(n) – влиянието на независимите променливи върху зависимата се разпростира във времето.

$$DL(2) \quad y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Интерпретацията на параметрите не е както при обикновените модели, тъй като промяната в x_t води до промяна в x_{t-1} в следващия период и т.н.

β_0 - краткосрочен мултипликатор (незабавна реакция)

$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ - дългосрочен мултипликатор (траен ефект)

Модел с разпределение на лаговете

102

Пример:

Следният модел показва зависимостта на потреблението (C) от доходите (I) на дадено домакинство:

$$\hat{C}_t = const + 0,5I_t + 0,25I_{t-1} + 0,1I_{t-2}$$

Ако доходите се увеличат трайно със 100 лв. какво ще бъде влиянието на това повишение върху потреблението?

$\beta_0 = 0,5$ – показва незабавната реакция на потреблението

$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0,85$ – показва цялостната реакция

Реакция на външен импулс (шок)

103

- Краткосрочен мултипликатор – описва незабавната реакция на y на единична промяна на X , $\Delta X=1$.
- Дългосрочен мултипликатор - описва реакцията на y на единична промяна на всички X , тоест реакцията на y на трайната промяна на X .
- Време на половична реакция – показва времето, в което се реализира половината от дълготрайния ефект.

$$r = \sum_{i=1}^k \frac{i\beta_i}{k}$$

Модел с разпределение на лаговете

104

- Моделите DL спазват условията на КМНК, ако:
 - обясняващите променливи са нестохастични;
 - няма автокорелация на случайния фактор.

Модел с безкрайно разпределение на лаговете

105

- Модел DL(∞)

$$C_t = \alpha + \beta_0 I_t + \beta_1 I_{t-1} + \beta_2 I_{t-2} + \dots + \varepsilon_t$$

- Трансформация на Коуск – предполагаме, че влиянието на обясняващата променлива намалява с времето.

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k \quad 0 < \lambda < 1$$

$$C_t = \alpha + \beta_0 I_t + \beta_0 \lambda I_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 I_{t-2} + \dots + \varepsilon_t$$

$$C_{t-1} = \alpha + \beta_0 I_{t-1} + \beta_0 \lambda I_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 I_{t-3} + \dots + \varepsilon_{t-1}$$

- Ако умножим второто уравнение по λ и го извадим от първото, получаваме:

Модел с безкрайно разпределение на лаговете

106

$$C_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta_0 I_t + \lambda C_{t-1} + (\varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1})$$

- Използвайки $\beta_k = \beta_0 \lambda^k$ можем да изчислим толкова параметри β_k , колкото желаем.
- Дългосрочният мултипликатор: $\beta = \beta_0 \frac{1}{1 - \lambda}$

Равновесие

107

Какво е дългосрочното статично равновесие на модела?

На какво условие трябва да отговаря, за да съществува дългосрочно равновесие (стабилност)?

Авторегресионен модел с разпределение на лаговете, ADL (autoregressive distributed lags)

108

- ADL(1,1,1)

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Дългосрочната стабилност на модела зависи от:

$$|\lambda| < 1$$

- (или по-точно от стационарността на частта AR)
- Какво е статичното дългосрочно решение?

Реакция на външен импулс (шок)

109

- Изчислете краткосрочния и дългосрочния мултипликатор на модела $ADL(1,1,1)$.

Равновесие

110

- Моделът ADL има дългосрочно равновесно решение, ако неговата авторегресионна част е стационарна.

Модел с разпределение на лаговете

111

- Моделите DL най-често не спазват условията на КМНК, защото обясняващите променливи са стохастични.
- За да бъдат естиматорите неизместени, необходимо е обясняващите променливи и случайния фактор да са независими.

Модел с механизъм за корекция на грешката (error correction mechanism, ECM)

112

- Равновесен модел с механизъм за корекция на грешката (Equilibrium model with error correction mechanism)

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + (\lambda - 1) \left(y_{t-1} - \frac{\alpha}{1 - \lambda} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \lambda} x_{t-1} \right) + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + \underbrace{\gamma (y_{t-1} - \mu - \delta x_{t-1})}_{\text{error correction term}} + \varepsilon_t$$

error correction term

$$y_t = \mu + \delta x_t + v_t$$

Модел с ЕСМ - интерпретация

113

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + \underbrace{\gamma(y_{t-1} - \mu - \delta x_{t-1})}_{\text{error correction term}} + \varepsilon_t$$

error correction term

y се променя в периода от $t-1$ до t в резултат на:

- промяната на обясняващата променлива x в периода от $t-1$ до t
- и от части, за да “поправи” неравновесието, което е настъпило в предишния период.

δ – показва дългосрочната зависимост между x и y : $y_t = \mu + \delta x_t + v_t$

β_0 – показва краткосрочната зависимост между промените на x и y .

Модел с ЕСМ - интерпретация

114

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + \gamma (y_{t-1} - \mu - \delta x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

- Ако след естимацията, $-1 < \hat{\gamma} < 0$

действа механизма за корекция на грешката.

γ – показва скоростта на връщане към равновесното положение, а точно измерва частта от неравновесието в предишния период, която е “поправена”. Затова очакваме, че знакът му ще е отрицателен.

Модел ЕСМ – повече от 1 обясняващи променливи

115

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + \varphi_0 \Delta z_t + \gamma \underbrace{(y_{t-1} - \mu - \delta_1 x_{t-1} - \delta_2 z_{t-1})}_{\text{error correction term}} + \varepsilon_t$$

error correction term

Връзка между моделите ADL и ECM

116

Между моделите ADL и ECM съществуват следните интересни връзки:

- Колкото по-силна е инерцията на модела ADL (λ близо до 1), толкова по-бавно системата се връща до равновесното си положение (γ близо до 0), $\gamma = \lambda - 1$.
- Ако действа механизма за корекция на грешката в ECM ($-1 < \gamma < 0$), това означава, че моделът ADL е стабилен ($|\lambda| < 1$), и обратно.

Теорема за репрезентацията на Granger (Granger representation theorem)

117

- Всяка коинтеграционна зависимост може да бъде представена като равновесен модел с механизъм за корекция на грешката (equilibrium model with ECM) и vice versa.

Метод на Engle-Granger за оценка на модели с ЕСМ

118

I етап: Проверяваме дали редовете са $I(1)$, след

което оценяваме: $y_t = \delta x_t + V_t$

Проверяваме дали остатъците са $I(0)$. Ако да:

II етап:

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t + \gamma (y_{t-1} - \delta x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Коинтегриращ вектор:

$$(1; -\delta)$$

$$\hat{V}_{t-1}$$